Limiti notevoli esponenziali

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 sen\frac{1}{n^2}=1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$

6) $\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$

7) $\lim\limits_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\lg_e(1+x)}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $\quad \lim\frac{e^x-1}{x}=1$

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=1$

12) $\lim\limits_{x\to0}x^r\lg_a x=0 \quad \forall a\in R^+-(1),\forall r\in R^+$

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\lg_a x}{x^r}=0 \quad \forall a\in R^+-(1),\forall r\in R^+$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r a^x=\lim\limits_{x\to+\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-(1),\forall r\in R^+$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^r a^x=\lim\limits_{x\to-\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-(1),\forall r\in R^+$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r}=\lim\limits_{x\to+\infty}a^x\ \forall r\in R^+$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}a^x\forall r\in R^+$

18) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x x^r=0 \quad \forall r\in R^+$

Limiti notevoli logaritmici

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senx}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{senax}{bx}=\frac{a}{b}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgax}{bx}=\frac{a}{b}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arcsenx}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arcsen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\,x}{x}=1$

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-senx}{x^3}=\frac{1}{6}$

12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}=\frac{1}{3}$

Altri limiti notevoli

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot a^n}{n^n}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^n}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2+n^4}\right)^{\frac{n^2+n^4}{3}}=e$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

se:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^n+bx^{n-1}+c}{x^a+bx^{a-1}+c}$ $\quad$ n > a = ±∞; n = a = rapp.coeff.; n < a = 0

FORME INDETERMINATE

0/0 mettere in evidenza num. e den.

∞/∞ mettere in evidenza

+ ∞ - ∞ razz. o mcd

0 · ∞ trasformo in ∞/∞ o in 0/0 capovolgendo

esempi

n/∞ = 0 $\quad$ n/0 = ∞ $\quad$ ∞/n = ∞ $\quad$ 0/n = 0

∞/0 = ∞ $\quad$ ∞³/ ∞³ = 1 (stessa potenza)

Criterio del rapporto:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\begin{matrix}\to\ <1 & a_n\to0\\ \to\ >1 & a_n\to\infty\end{matrix}$

Teorema della media aritmetica:
se la successione an ammette limite allora:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

Teorema della media geometrica:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_2...+a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

REGOLA DE L'HOPITAL:

la regola de l'Hopital si applica nelle forme ∞/∞ o 0/0

$0\cdot\infty$ capovolgere

$+\infty-\infty$ MCD o razionalizzazione

Talvolta può essere utile ricondurre alle identità:

$f-g=f\left(1-\frac{g}{f}\right)=g\left(\frac{f}{g}-1\right)$

Derivate di funzioni:

$D:costante\ k\to0$	$D:\arccos x\to-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D:x^n\to nx^{n-1}$	$D:arctg\ x\to\frac{1}{1+x^2}$
$D:\sqrt{x}\to\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D:\text{arccotg}\ x\to-\frac{1}{1+x^2}$
$D:\sqrt[n]{x^m}\to\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$D:a^x\to a^x\log_e a$
$D:sen\,x\to\cos x$	$D:e^x\to e^x$
$D:\cos x\to-senx$	$D:\log_a x\to\frac{1}{x}\log_a e$
$D:tgx\to\frac{1}{\cos^2 x}$	$D:\ln x\to\frac{1}{x}$
$D:\text{cotgx}\to-\frac{1}{sen^2x}$	$D:x^x\to x^x(\log x+1)$
$D:\text{arcsen}\ x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D:arctg\ f(x)\to\frac{1}{1+[f(x)^2]}\cdot f'(x)$
$D:[f(x)]^m\to m[f(x)]^{m-1}\cdot f'(x)$	$D:\text{arccotg}\ f(x)\to-\frac{1}{1+[f(x)^2]}\cdot f'(x)$
$D:\sqrt{f(x)}\to\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$	$D:e^{f(x)}\to e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$D:\sqrt[n]{[f(x)]^m}\to\frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$	$D:a^{f(x)}\to a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\log_a e$
$D:sen\ f(x)\to\cos f(x)\cdot f'(x)$	$D:\log f(x)\to\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$D:\cos\ f(x)\to-senf(x)\cdot f'(x)$	$D:\log_a f(x)\to\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\log_a e$
$D:tg\ f(x)\to\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$	$D:[f(x)]^{g(x)}\to[f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$
$D:cotg\ f(x)\to-\frac{1}{sen^2 f(x)}\cdot f'(x)$	$D:[f(g(x))]\to f'[g(x)]\cdot g'(x)$
$D:arcsen\ f(x)\to\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$	$D:[f(x)\cdot g(x)]\to f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$D:\arccos\ f(x)\to-\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$	$D:\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\to\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

FUNZIONI FRATTE:

***N ≥ D** :divido il numeratore per il denominatore*

$\frac{f(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$ quindi $\int\frac{f(x)}{g(x)}=\int Q(x)dx+\int\frac{R(x)}{g(x)}dx$ **dove**

Q(x) = quoziente   R(x) = resto   g(x) = divisore

N < D :

1°caso **Δ > 0** *Bisogna scomporre il denominatore come prodotto, trovare il valore dei parametri A e B e separare l'integrale*

2°caso **Δ = 0** **1)** *Scompongo il denominatore facendolo diventare quadrato di binomio e lo elevo ad una potenza negativa (-2)*

2) Se il numeratore contiene la x uso i parametri A e B (come nel 1°caso)

3° caso Δ < 0 1) ***Riconduco l'integrale alla Formula n° 1.***

2) Se il numeratore contiene la x (es. $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$**) allora lo trasformo per farlo diventare come f'(x)/f(x)**

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{\frac{p}{2a}\left(2ax+\frac{2aq}{p}\right)}{ax^2+bx+c}=\frac{p}{2a}\left[\frac{2ax+b+\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}\right]$$

INTEGRALI notevoli immediati

1) $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$

2) $\int e^x dx=e^x+C$

3) $\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

4) $\int\cos x dx=senx+C$

5) $\int senxdx=-\cos x+C$

6) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$

7) $\int\frac{1}{sen^2x}dx=-\frac{1}{tgx}+C$

8) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsenx+C$

9) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=arctgx+C$

10) $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

11) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$

12) $\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+C$

Integrazione con la prima regola di sostituzione:

1) $\int f(x)^\alpha\cdot f'(x)\ dx=\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}+C$

2) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\ dx=\log|f(x)|+C$

3) $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=e^{f(x)}+C$

4) $\int\cos f(x)\cdot f'(x)\,dx=senf(x)+C$

5) $\int senf(x)\cdot f'(x)\,dx=-\cos f(x)+C$

6) $\int\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx=tgf(x)+C$

7) $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx=arcsenf(x)+C$

8) $\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx=arctgf(x)+C$

9) $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\,dx=\log\left(f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}\right)+C$

10) $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}\,dx=\log\left(f(x)+\sqrt{f^2(x)-1}\right)+C$

11) $\int\frac{f'(x)}{1-f^2(x)}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+f(x)}{1-f(x)}+C$

Regola di decomposizione in somma:

$\int a\cdot f(x)\pm b\cdot g(x)\ dx=a\int f(x)dx\pm b\int g(x)dx$

Prima formula di sostituzione:

$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\ dx=\left[\int f(t)dt\right]_{t=\phi(x)}$

Integrazione per parti:

$\int f'(x)\cdot g(x)\ dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$

integrazione per parti 2° modo:

$\int f(x)\cdot g(x)dx=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)dx$

dove F(x) è una primitiva immediata di f(x)

Formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x)=\sum_{K=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}+......................$$
$$.......+f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\circ\left((x-x_0)^n\right)$$

Sviluppi :

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n)$

2) $senx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+2})$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n+1})$

4) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\circ(x^n)$

5) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n\cdot x^n+\circ(x^n)$

6) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+...+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^n+\circ(x^n)$

7) $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-...(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot x^n+\circ(x^n)$

8) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n\cdot x^{2n}+\circ(x^{2n+1})$

9) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}+\circ(x^{2n+1})$

10) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^n+\circ(x^n)$

11) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\circ(x^{2n+2})$

12) $arcsenx=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+...+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\circ(x^{2n+2})$

13) $\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5-...-\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\circ(x^{2n+2})$

14) $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\circ(x^8)$

Fattoriali: 3!=6 ; 4!=24 ; 5!=120 ; 6!=720

Formulario Analisi Matematica I

by www.giuseppechierchia.it

gradi	rad	Sen	Cos	Tg (sen/cos)	Cotg (1/tg)
0	0	0	1	0	$\pm\infty$
18	$\pi/10$ 0.314	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
30	$\pi/6$ 0.523	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$ 0.785	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\pi/3$ 1.047	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
72	$2\pi/5$ 1.256	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
90	$\pi/2$ 1.57	1	0	$\pm\infty$	0
180	π 3.1415	0	-1	0	$\pm\infty$
270	$3\pi/2$ 4.712	-1	0	$\pm\infty$	0
360	2π 6.283	0	1	0	$\pm\infty$

Angoli associati:

$sen(-x)=-senx$
$\cos(-x)=\cos x$
$tg(-x)=-tgx$

$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=senx$
$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ctgx$

$sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-senx$
$tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-ctgx$

$sen(\pi-x)=senx$
$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$tg(\pi-x)=-tgx$

$sen(\pi+x)=-senx$
$\cos(\pi+x)=-\cos x$
$tg(\pi+x)=tgx$

Formule goniometriche

Formule di addizione

$sen(x+y)=senx\cos y+senx\cos y$
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-senxseny$
$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$

Formule di sottrazione

$sen(x-y)=senx\cos y-seny\cos x$
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+senxseny$
$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$

Formule di triplicazione

$sen3x=3senx-4sen^3x$
$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
$tgx=\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}$

Formule di duplicazione:

$sen2x=2senx\cos x$
$\cos(2x)=\cos^2 x-sen^2x=1-2sen^2x=2\cos^2 x-1$
$sen^2x=\frac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

Formule di prostaferesi:

$senx+seny=2sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$senx-seny=2\cos\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$
$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x-\cos y=-2sen\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$

Formule di Werner:

$senx\cdot seny=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$
$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
$senx\cdot\cos y=\frac{1}{2}[sen(x+y)+sen(x-y)]$

Formule di bisezione:

$sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
$tg\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{senx}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{senx}$

Relaz. fond. della trig.

$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$\cos^2\alpha=1-sen^2\alpha$

Funz.	Dom.	interv. Graf.	Cod.	Monotonia
Sen	-∞ ; +∞	-π/2; (3/2)π	-1 ; +1	oscillante
Cos	-∞ ; +∞	-π ; π	-1 ; +1	oscillante
Tg	-∞ ; +∞	-π/2 ; π/2	-∞ ; +∞	monotona
Cotg	-∞ ; +∞	0 ; π	-∞ ; +∞	decrescente
Arcsen	-1 ; +1	-1 ; +1	-π/2 ; + π/2	monotona
Arccos	-1 ; +1	-1 ; +1	0 ; π	decrescente
Arctg	-∞ ; +∞	-∞ ; +∞	-π/2 ; + π/2	monotona

f pari f(-x) = f(x)
f dispari f(-x) = - f(x)

y' = 0 *Massimi e minimi*
y' > 0 *Intervalli crescenti (crescenza)*
y' < 0 *Intervalli decrescenti (decrescenza)*

y'' = 0 *Punti di flesso*
y'' > 0 *Concavità verso l'alto*
y'' < 0 *Concavità verso il basso*

Retta tangente in un punto
y-f(x∘) = f '(x∘) (x - x∘)

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

derivabilità ⟹ continuità
continuità ⇏ *derivabilità*

Tipi di discontinuità:
1ª specie: La funzione fa un salto
$\lim_{x\to x_{0^-}}=l_1 \quad\neq\quad \lim_{x\to x_{0^+}}=l_2$
2ª specie: uno dei due limiti va all'infinit
3ª specie: discontinuità di tipo eliminabil finito il limite
$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ ed x0 non appartiene al dominic

Punto angoloso: sia x0 un punto non appartenente al dominio D(y'). x0 è un punto angoloso se:
$\lim_{x\to x_{0^+}} f'(x)=l \quad e \quad \lim_{x\to x_{0^-}} f'(x)=l_1$
x_0 risulta un punto di cuspide quando:
$\lim_{x\to x_{0^+}} f'(x)=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_{0^-}} f'(x)=-\infty$

Asintoti obliqui: y = m x + q *Quando il limite* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
Allora è necessario trovare gli eventuali asintotoi obliqui

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$$

Qualora entrambi i limiti esistano e siano finiti con ***m ≠ 0****, allora la retta* ***y = m x + q*** *è un asintoto obliquo della funzione*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ax² + bx + c > 0
Δ > 0 x1<0 ∪ x2>0
Δ = 0 ∀ x ∈ R - (x1= x2)
Δ < 0 ∀ x ∈ R
ax² + bx + c = 0
Δ > 0 x1 ; x2 con x1< x2
Δ = 0 x1= x2
Δ < 0 N.S. reale
ax² + bx + c < 0
Δ > 0 x1<x <x2
Δ = 0 N.S. reale
Δ < 0 N.S. reale

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{2}-ac}}{a}$$

Proprietà delle potenze:

1) $a^{n+m}=a^n\cdot a^m$
2) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
3) $a^0=1$
4) $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$
5) $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

$Es.: 4^x-2^{2x+1}\to 2^{2x}-2^{2x}\cdot 2$
$\to 2^{2x}(1-2)$

Proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a x\cdot y=\log_a x+\log_a y$
2) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
3) $\log_a(x)^k=k\log_a x$
4) $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$
5) $a^{\log_a x}=x$

$Es. 3^x\geq 2\to x\geq\log_3 2$
$Esemp. 3^x=2\to\log_3 3^x=\log_3 2\to$
$\to x\log_3 3=\log_3 2\to x=\log_3 2$

operazioni con i radicali:

$\sqrt[9]{64}=\sqrt[9]{2^6}\to\sqrt[3]{2^2}$
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{25\cdot 8}$
$\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{3}=3$

Scomposizione di un'eq. di 2° grado.

$ax^2+bx+c=\ x_1, x_2$
$a(x-x_1)(x-x_2)$

Scomposizione con s e p

x^2-sx+p

Prodotti notevoli

$(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$
$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(a^4-b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

Regola di Ruffini

$(2x^4-18x^2-x+3)\div(x-d)$

Nel nostro caso d = 3 : il divisore è (x-3)

	2	0	-18	-1	3
3	d	6	18	0	-3
	2	6	0	-1	0

SERIE

Consideriamo una successione a_n di numeri reali
La somma dei primi n termini della successione detta somma parziale si indica con:

$$s_n=a_1+a_2+...a_n=\sum_{K=1}^{n}a_k$$

tale successione prende il nome di serie di termine generale a_n

$$\sum_{K=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{K=1}^{n}a_k$$

il termine a primo membro si legge somma o serie per k che va da 1 a +∞, di a_k
1) se il limite per n→+∞ di a_n esiste ed è un numero finito si dice che la serie è ***convergente***
2) se il limite di s_n vale +∞ oppure -∞ , si dice che la serie è ***divergente.***
Una serie divergente o convergente si dice ***regolare.***
3) Se non esiste il limite per n→+∞ di s_n si dice che la serie è ***indeterminata.***
Il carattere di una serie è la sua proprietà di essere convergente o divergente oppure indeterminata.

Condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie:
se la serie $\sum_{K=1}^{\infty}a_n$ *è convergente allora la successione a_n tende a zero per n→+∞*
Riassumendo:
se la serie converge: → il limite della successione an tende a zero
ma non è vero il contrario
se il limite della successione è diverso da zero → allora la serie necessariamente diverge.

Proprietà sulle serie:

PROPOSIZIONE 1) se le serie di termine generale a_k e b_k sono regolari allora anche la serie di termine generale (a_k + b_k) è regolare.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

PROPOSIZIONE 2) se la serie di termine generale a_k è regolare, anche la serie di termine generale c • a_k è regolare per ogni c app. a R.

$$\sum_{k=1}^{\infty}c\cdot a_k=c\cdot\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

Una serie è a ***termini non negativi*** *se per ogni n ∈ N risulta a_n ≥ 0.*
Una serie è a ***termini positivi*** *se a_n >0 per ogni n.*
Teorema sulle serie a termini non negativi: una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. È quindi convergente oppure divergente positivamente.

SERIE GEOMETRICA (potenze di un numero)

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+h+h^2+...+h^n...$$

il numero h si dice ragione della serie geometrica.
Per conoscere il carattere della serie vediamo la soma parziale

$$s_n=1+h+h^2+...+h^{n-1}=\frac{1-h^n}{1-h}$$ per la regola di ruffini si ha ciò

moltiplicando e dividendo per (1-h)
il carattere della serie è quindi dato dal limite:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-h^n}{1-h}=\begin{cases}\text{la serie converge a }\frac{1}{1\text{-}h}\text{ per }-1>h>1\\ \text{la serie diverge per }h\geq 1\\ \text{la serie è indeterminata per h}\leq -1\end{cases}$$

SERIE ARMONICA (diverge positivamente)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...\begin{cases}\text{converge se }\alpha>1\\ \text{diverge se }\alpha\leq 1\end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO: *solo per le succ. a termini positivi*
Sia an una ***successione a termini positivi*** *e supponiamo che esista il limite:*

allora si ha che

$$l=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad l<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k<+\infty \text{ converge}$$
$$l>1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty \text{ diverge}$$

nel caso il limite è = 1 non possiamo dire nulla riguardo al carattere della serie

CRITERIO DELLA RADICE
solo per le succ. a termini positivi
Sia an una ***successione a termini non negativi*** *e supponiamo che esista il limite:*

allora se:

$$l=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \qquad l<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k<+\infty \text{ converge}$$
$$l>1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty \text{ diverge}$$

nel caso il limite è = 1 non possiamo dire nulla riguardo al carattere della serie

CRITERIO DI LEIBENIZ *(si usa per le serie a segni alterni)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n \qquad a_n\geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \qquad a_n\geq a_n+1 \qquad \forall n$$

quindi la serie converge