1. Suggerimenti

- In $\mathbf{R}^2$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2)$ è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^2$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:

$$r: \quad ax + by + k = 0$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:

$$r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :

$$\pi : \quad ax + by + cz = k$$

Il vettore (a, b, c) ha direzione perpendicolare al piano.

- Due rette r_1 e r_2 sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette r_1 e r_2 sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani π_1 e π_2 sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 :\ a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ e $\pi_2 :\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ sono paralleli se i vettori (a_1, b_1, c_1) e $(a_2, b_2.c_2)$ sono proporzionali.
- Una retta r è **perpendicolare** al piano $\pi :\ ax + by + cz = k$ se r ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto scalare** di u e v il **numero**:

$$(u, v) = u \cdot v^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

- Date due rette r_1 parallela a un vettore u e r_2 parallela a un vettore v, l'**angolo** ϑ tra le due rette è dato da:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|},$$

dove $|u|$ =**norma** di u= **lunghezza** di u =$\sqrt{(u, u)} = \sqrt{u \cdot u^T}$.

Isometrie. Le isometrie sono trasformazioni del piano $f(x, y) = f(x', y')$ che mantengono le distanze. Un punto P tale che $P' = f(P) = P$ è detto **punto fisso**; una retta r tale che $r' = f(r) = r$ è detta **retta fissa**. Ci sono quattro tipi di isometrie:

- Isometrie **dirette**: mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$

Ci sono due tipi di isometrie dirette:
  - **Traslazioni**: $s = 0$. Non hanno punti fissi.
  - **Rotazioni**: $s \neq 0$. Hanno un punto fisso (il centro di rotazione) che si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases}$$

- Isometrie **inverse**: non mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$

Ci sono due tipi di isometrie inverse:

- **Riflessioni** o simmetrie rispetto ad una retta. Hanno una retta di punti fisi (l'asse di simmetria) e infinite rette fisse (le rette ortogonali all'asse).
- **Glissoriflessioni**: composizione di una rflessione e di una traslazione parallela all'asse di simmetria. Non hanno punti fissi.

1. Suggerimenti

- **Gruppo.** Un insieme G forma un gruppo rispetto a una sua operazione $\circ$ se
  (1) L'operazione gode della proprietà associativa,
  (2) G è chiuso rispetto a $\circ$, ovvero
  $$x \circ y \in G \qquad\qquad \forall x, y \in G,$$
  (3) Esiste l'elemento neutro e, tale che:
  $$x \circ e = e \circ x = x \qquad\qquad \forall x \in G,$$
  (4) Esiste l'inverso (o opposto) di ogni elemento:
  $$\forall x \in G, \, \exists \, x^{-1} \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ x^{-1} = e.$$
  In notazione additiva:
  $$\forall x \in G, \, \exists \, -x \in G \quad \text{t.c.} \quad x \circ (-x) = e.$$
- **Spazio vettoriale**. Uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di due operazioni: la somma interna e il prodotto per scalari, e che gode delle seguenti proprietà:
  (1) V è gruppo commutativo rispetto alla somma, quindi
  - V é chiuso rispetto alla somma.
  - L'elemento neutro 0 appartiene a V.
  - Esiste l'opposto $-v$ di ogni elemento $v \in V$.
  - La somma é commutativa.

  (2) Il prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà:
  - $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$,
  - $k(u + v) = ku + kv$ qualsiasi $k \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u, v \in V$,
  - $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ qualsiasi $k_i \in \mathbf{R}$ e qualsiasi $u \in V$
  - $1u = u$ qualsiasi $u \in V$.
- **Sottospazio vettoriale**. Un sottinsieme S di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se in S valgono le seguenti proprietá
  (1) Se $u, v \in S$, allora $u + v \in S$.
  (2) Se $u \in S$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda u \in S$.
  Notiamo che S é un spazio vettoriale e le proprietá precedenti, unite a quelle ereditate da V, implicano tutte le proprietá di spazio vettoriale. In particolare S contiene lo 0 e l'opposto di ogni suo elemento.

1. Suggerimenti

- A ogni sistema lineare associamo la matrice formata dai coefficienti delle incognite e dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \mid & 1 \\ -1 & 3 & 4 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

- Utilizzeremo il **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & \mid & \star \\ 0 & \star & \star & \mid & \star \\ 0 & 0 & \star & \mid & \star \end{bmatrix}$$

  Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.
- Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:
  - Scambio di due righe della matrice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \mid & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \mid & 1 \\ -1 & 3 & 4 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \mid & 1 \\ 2 & 2 & 4 & \mid & 4 \\ -1 & 3 & 4 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

- Scambio di due colonne della matrice. In tale caso si scambia la posizione di due incognite. Al termine della riduzione, quando si ritorna al sistema, è quindi necessario ricordare lo scambio delle incognite.
- Sostituzione di una riga con un suo multiplo non nullo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione linare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -2 & -6 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

  Per evitare errori è necessario badare che:
  * Se sto sostituendo l'n-esima riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga, il coefficiente per cui viene moltiplicata l'n-esima riga deve essere non nullo. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ kII-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} k & 1 & | & 2 \\ 0 & 3k-2 & | & k-4 \end{bmatrix} \text{è lecita solo se } k \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ k & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-kI \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2-3k & | & 4-k \end{bmatrix} \text{è sempre lecita}$$

    Per questo diremo che è conveniente spostare i parametri verso il basso.
  * Per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione, utilizzeremo per modificare una riga solo le righe che la precedono. Quindi
    · La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
    · La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
    · La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.
    · ...

- Esempi di riduzione a gradini si possono vedere nei successivi capitoli.
- Le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio vettoriale se e solo se il sistema è **omogeneo**.
- Molti esercizi possono risolti in maniera leggermente diversa utilizzando il teorema di Rouché-Capelli e il concetto di rango. A tale scopo si veda il Capitolo 7.

---

1. Suggerimenti

- n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ sono detti **linearmente indipendenti** se

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

  In caso contrario sono detti **linearmente dipendenti**.
- Un vettore w è combinazione di n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tali che:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = w$$

- Se n vettori sono linearmente dipendenti, allora almeno uno è combinazione lineare degli altri.
- Se w è combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$, allora $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n,\ w$ sono linearmente dipendenti.
- Alcuni degli esercizi svolti in questo capitolo possono essere svolti in maniera leggermente semplificata utilizzando la nozione di rango (v. capitoli successivi).

---

1. Suggerimenti

Una matrice (quadrata) A è invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1}, tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$.

Per calcolare l'inversa di una matrice utilizzeremo due metodi:

- Si affianca alla matrice A la matrice identica e si riduce A a gradini in forma normale (cioè con tutti 1 sulla diagonale e 0 altrove). La matrice in cui è stata trasformata la matrice identica è l'inversa A^{-1}.
- Si utilizzano le formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [a'_{ij}]^T$$

dove

$$\begin{aligned} a'_{ij} = & \text{ complemento algebrico di } a_{ij} \\ = & (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{matrice ottenuta da } A \text{ eliminando la riga } i \text{ e la colonna } j) \end{aligned}$$

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Talvolta per calcolare il rango di una matrice può essere utile utilizzare un metodo misto di riduzione e di calcolo dei determinanti. Infatti, sia A una matrice e A' la matrice ottenuta da A con qualche passo di riduzione a gradini. Allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$. In particolare se A è quadrata $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$, ovvero che $\text{rg}(A)$ sia massimo.

---

1. Suggerimenti

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Osservazioni

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice $n \times m$, allora $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
- Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice.

Rouchè-Capelli.
Un sistema di equazioni $Ax = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$$

Inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) =$ numero delle incognite.
- Ammette infinite soluzioni se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) <$ numero delle incognite.

Dipendenza lineare.
Sia V uno spazio lineare e $v,\ v_i$ vettori di V.

- v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = v$$

ammette soluzione.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|b$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$ e b è data dal vettore v. In tale caso:

v è **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_n$ sse $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

- $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** se l'equazione:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

ammette la **sola** soluzione nulla $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$.

Nel caso particolare in cui $V \subseteq \mathbf{R}^m$, alla precedente equazione possiamo associare la matrice $A|0$, dove le colonne di A sono date dai vettori $v_1, \dots, v_n$. In tale caso:

$v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** sse $\text{rg}(A) = n$

Basi e dimensione.

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sottinsieme di V. Diciamo che S è una **base** di V se:

(1) S è un insieme generatore di V: $V = \langle S \rangle$, cioè ogni elemento di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S.
(2) Gli elementi di S sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale corrisponde al numero di elementi di una sua base.

Nel caso particolare in cui $V = \mathbf{R}^n$ sappiamo che S per essere una base deve essere formato da n elementi, ed è sufficiente verificare che gli n elementi di S siano linearmente indipendenti. Ragionando sui ranghi, n **vettori di $\mathbf{R}^n$ formano una base di $\mathbf{R}^n$ se e solo se la matrice associata ha rango n.**

Spazi vettoriali

- Nel caso particolare di

$$V = \langle\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\rangle,$$

se indichiamo con A la matrice formata dai vettori colonna $v_1, \dots, v_n$, allora:

$$\begin{aligned} &\dim(V) = \text{rg}(A) \\ &\mathcal{B}(V) = \text{base di } V &&= \{\text{vettori linearmente indipendenti tra } v_1, \dots, v_n\} \\ & &&= \{\text{vettori tra } v_1, \dots, v_n \text{ corrispondenti ai pivot di } A\ \} \end{aligned}$$

- Nel caso particolare di

$$V = \{\ \text{soluzioni di un sistema omogeneo}\ \},$$

se indichiamo con A la matrice associata al sistema e con n il numero delle incognite, allora:

$$\dim(V) = n - \text{rg}(A)$$

$$\mathcal{B}(V) = \text{base di } V = \{\text{generatori delle soluzioni una volta scritte in forma vettoriale}\ \}$$

---

1. Suggerimenti

Una **Applicazione lineare** $T : V \to W$ è una funzione tra due spazi vettoriali che gode delle seguenti proprietà:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

In particolare se $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n)$$

A ogni applicazione lineare può essere associata una **matrice** $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi della base di V, espresse rispetto alla base di W. Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(V) = A \cdot v \qquad \forall v \in V$$

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$T(e_1) = (1, 2, 1)$$
$$T(e_2) = (1, 0, -1)$$

- La matrice associata rispetto a una base:
  $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Se non è specificato, la matrice si intende sempre associata rispetto alle basi canoniche.

Le tre precedenti definizioni definiscono la stessa applicazione lineare.

L'**Immagine** $\mathrm{Im}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \ \dots, \ v_n\}$ di V:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \subseteq W$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$ associata:

- $\mathrm{Im}(T)$ = spazio generato dalle colonne di A (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche)
- $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{$ colonne linearmente indipendenti di A $\}$ (Prestare attenzioni se le basi di V e W non sono quelle canoniche).
- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A)$

Il **Nucleo** $\mathrm{N}(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $\mathrm{N}(T) = \{$ soluzioni del sistema omogeneo associato a A $\}$ (Prestare attenzione se le basi di U e di V non sono quelle canoniche.
- $\dim(\mathrm{N}(T)) = n - \mathrm{rg}(A)$, dove $n = \dim(V)$ = numero delle incognite del sistema lineare.

- Il teorema di **Nullità più rango** afferma che se $T : V \to W$ allora:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n = \dim(V)$$

- Una applicazione è detta **Iniettiva** se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, cioè se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.
- Una applicazione è detta **Suriettiva** se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$, cioè se $\mathrm{Im}(T) = W$.
- Una applicazione è detta **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Un'applicazione è **invertibile** sse è biiettiva.

Bisogna prestare particolare attenzione quando l'applicazione non è definita sulle basi canoniche.

Matrici di transizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' =$

$\{v_1', \dots, v_n'\}$ due basi di V. Ogni vettore w di V si può scrivere come combinazione lineare degli elementi delle due basi:

$$\begin{aligned} &w = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = x_1'v_1' + \cdots + x_n'v_n' \Rightarrow \\ &w = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B} \\ &w = (x_1', \dots, x_n')_{\mathcal{B}'} \quad \text{componenti di } w \text{ rispetto a } \mathcal{B}' \end{aligned}$$

- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1', \dots, x_n')$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, indicata con $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ epressi rispetto a $\mathcal{B}'$:
$$(x_1', \dots, x_n') = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$$
- Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione tale che $T(x_1', \dots, x_n') = (x_1, \dots, x_n)$. La matrice associata a T è detta matrice di transizione da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, indicata con $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Tale matrice ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}'$ epressi rispetto a $\mathcal{B}$:
$$(x_1, \dots, x_n) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot (x_1', \dots, x_n')^T$$

Osservzioni

- Le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ sono una l'inversa dell'altra.
- Se $T : V \to V$ è un endomorfismo e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora
$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(T) \cdot P \qquad \text{con} \quad P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

1. Suggerimenti

Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una applicazione lineare (endomorfismo) e M la matrice associata rispetto a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^n$. Parleremo quindi indifferentemente di T e M.

Il **Polinomio caratteristico** di M é il polinomio

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

Notiamo che $p_M(\lambda)$ è un polinomio di grado n nell'incognita λ.

Un **Autovalore** di M è un numero λ per cui esiste un vettore $v \in \mathbf{R}^n$ **non nullo** tale che

$$Mv = \lambda v$$

OSSERVAZIONI:

- Se λ é un autovalore di M allora per qualche $v \neq 0$:
$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0 \;\Rightarrow\; \det(M - \lambda I) = 0$$
quindi gli autovalori di M sono gli **zeri del polinomio caratteristico**, ovvero si determinano risolvendo
$$\det(M - \lambda I) = 0$$
- La molteplicità di λ come zero del polinomio caratteristico è detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ.

Un **Autovettore** relativo a un autovalore λ è un vettore v (e sicuramente ne esistono non nulli) tale che

$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)\, v = 0$$

Quindi v è **soluzione del sistema omogeneo associato a** $M - \lambda I$.

OSSERVAZIONI:

- L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ formano uno spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbf{R}^n$), detto **Autospazio** relativo all'autovalore λ:
$$E(\lambda) = \{ \text{ autovettori relativi a } \lambda \}$$
- Chiamiamo **Molteplicità geometrica** di λ la dimensione di $E(\lambda)$.
- Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ formano il nucleo di M, ovvero le soluzioni del sistema omogeneo associato a M.
- Per quanto riguarda la dimensione di $E(\lambda)$ abbiamo che
$$1 \leq \dim(E(\lambda)) \leq \text{molteplicità algebrica di } \lambda$$
In particolare se un autovalore é singolo, allora il relativo autospazio ha sicuramente dimensione 1.
- Autovettori di autospazi distiniti sono linearmente indipendenti.
- Poichè gli endomorfismi sono applicazioni di uno spazio in se stesso, la base dello spazio di arrivo e di partenza è sempre la stessa (a differenza di quanto poteva accadere negli esercizi del capitolo precedente).

Diagonalizzabilità.

Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se è **simile a una matrice diagonale** D, ovvero esiste una matrice P, detta **matrice diagonalizzante**, tale che $P^{-1}MP = D$ è una matrice diagonale.

OSSERVAZIONI:

- Poiché $P^{-1}MP = D$, le matrici M e D sono simili.
- La matrice diagonalizzante P ha per colonne autovettori linearmente indipendenti di M.
- $P^{-1}MP = D$ ha sulla diagonale gli autovalori di M.
- Una matrice M, $n \times n$, è **Diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è n, ovvero se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è n, ovvero se ha n autovettori linearmente indipendenti.
- Condizione necessaria perchè una matrice sia diagonalizzabile è che **la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidano**.

- Se M ha n autovalori distinti allora è sicuramente diagonalizzabile (infatti ha sicuramente n autospazi di dimensione 1).
- Se una matrice M è diagonalizzabile allora esiste una **base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di** M. La diagonalizzazione sottintende infatti un cambiamento di base in $\mathbf{R}^n$.
- Due matrici diagonalizzabili sono associate allo stesso endomorfismo (rispetto a basi differenti) se sono simili alla stessa matrice diagonale (ovvero hanno gli stessi autovalori). Analogamente se solamente una delle due matrici è diagonalizzabile allora non possono essere associate allo stesso endomorfismo.
- Le matrici e gli endomorfismi simmetrici godono di particolari proprietà.

1. Suggerimenti

Prodotto scalare: Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare di V è una applicazione
$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) : V \times V \to & \quad \mathbf{R} \\ (u, v) \ \mapsto & \ (u, v)\end{aligned}$$
che gode delle seguenti proprietà:

- proprietà simmetrica: $(u, v) = (v, u) \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{R}$,
- bilinearità: $(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\,(u, w) + \beta\,(v, w) \quad \forall\, u, v \in \mathbf{R} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
- definita positiva: $(u, u) \geq 0\ \forall u \in V$ e $(u, u) = 0$ sse $u = 0$.

(Notiamo che si usa la stessa notazione per la coppia (u, v) e per il loro prodotto scalare (u, v), ma il primo è una coppia di vettori mentre il secondo è un numero)

Il **prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$** (che noi considereremo salvo diversa indicazione) è: dati $u = (x_i)_{i=1,..,n}$ e $v = (y_i)_{i=1,..,n}$:
$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = u \cdot v^T$$

Norma o lunghezza: definiamo norma o lunghezza di un vettore v il numero
$$\| v \| = \sqrt{(v, v)}$$
Notiamo che
$$(v, v) = \| v \|^2$$

Angolo tra due vettori. Dati due vettori $u, v \in V$ e indicato con ϑ l'angolo convesso tra essi, si ha
$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{\| u \| \cdot \| v \|}$$

Ortogonalità. Due vettori $u, v \in V$ sono ortogonali se $(u, v) = 0$.

Proiezione ortogonale su un vettore. Dati due vettori $u, v \in V$ si chiama proiezione ortogonale di u su v il vettore
$$pr_v(u) = \frac{(u, v)}{\| v \|^2} \cdot v = \frac{(u, v)}{(v, v)} \cdot v$$

- $pr_v(u)$ è un vettore parallelo a v,
- $u - pr_v(u)$ è un vettore ortogonale a v,
- $u = (u - pr_v(u)) + pr_v(u)$, ovvero ogni vettore u può sempre essere scritto come somma di di un vettore ortogonale e di uno parallelo ad un altro vettore v.

Complemento ortogonale. Dato uno spazio vettoriale $W \subseteq \mathbf{R}^n$, chiamiamo complemento ortogonale di W lo spazio vettoriale
$$W^\perp = \{u \in \mathbf{R}^n \mid (u, w) = 0\ \forall w \in W\}$$
$W^\perp$ è uno spazio vettoriale.

Insieme ortonormale è un insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori:

- a due a due ortogonali: $(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j = 1, \dots, n$,
- di norma 1: $\| v_i \| = 1 = (v_i, v_i)$ per $i = 1, \dots, n$

Gram-Schmidt. Permette di individuare una base ortonormale

$$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

a partire da una base qualsiasi

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

nel seguente modo.

Determiniamo innanzitutto a partire da $\mathcal{B}$ una base

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1). Notiamo che siccome dei vettori w_i ci interessa solo l'ortogonalità, possiamo sostituire un vettore w_i ottenuto con un qualsiasi suo multiplo. In particolare per ottenere la base $\mathcal{B}'$ cercata è sufficiente rendere i vettori w_i di norma 1, dividendoli per la loro norma.

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1$
- $w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \dfrac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \dfrac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$
- ...
- $w_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{w_i}(v_n) = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{(v_n, w_i)}{(w_i, w_i)} \cdot w_i$

Quindi

$$u_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|}, \qquad u_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|}, \qquad u_3 = \frac{w_3}{\| w_3 \|}, \qquad \dots, \qquad u_n = \frac{w_n}{\| w_n \|}$$

La base canonica è una base ortonormale.

Proiezione ortogonale su uno spazio vettoriale. Siano V e W due spazi vettoriali tali che $W \subseteq V$, e sia $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ una base **ortonormale** di W. L'applicazione

$$\begin{aligned} P_W : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow w = \sum_{i=1}^{m} (v, e_i) \cdot e_i \end{aligned}$$

è detta **proiezione su** W.

- P_W è una **applicazione lineare** (endomorfismo di V).
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ appartiene a W.
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ è l'unico vettore di W tale che il vettore $v - w$ appartiene a $W^{\perp}$.

---

1. Suggerimenti

Endomorfismo simmetrico: $T : V \to V$ tale che:

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \qquad \forall u, v \in V$$

PROPRIETÀ :
Se T è un endomorfismo e A è la matrice associata a T rispetto a una **base ortonormale**, allora:

- T è simmetrico $\Leftrightarrow$ A è simmetrica (cioè $A = A^T$).
- T ha n autovalori reali (contati con la loro molteplicità).
- Autovettori relativi a autovalori distinti sono ortogonali.

Matrice ortogonale: P è una matrice ortogonale se

$$P \cdot P^T = I \quad \text{ovvero} \quad P^{-1} = P^T$$

Notiamo che $\det(P) = \pm 1$, e P è detta ortogonale speciale se $\det(P) = 1$.

Teorema spettrale

- Se T è un endomorfismo simmetrico di V, allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di T. In particolare T è diagonalizzabile, cioè esiste una base (ortonormale) di V rispetto alla quale la matrice associata a T è diagonale.
- Se A è una matrice simmetrica, allora A è simile a una matrice diagonale D (ovvero A è diagonalizzabile). Inoltre la matrice diagonalizzante P è una matrice ortogonale:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$

---

1. Suggerimenti

- Tre punti $P_i(x_i, y_i)$ del piano sono **allineati** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Quattro punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dello spazio sono **complanari** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) del piano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana del piano** passante per tre punti (non allineati) $P_i(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Tre punti dello spazio $P_i(x_i, y_i, z_i)$ sono **allineati** se e solo se:

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \leq 2$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) dello spazio $P_1(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Questo, per Kronecker, implica che due opportune sottomatrici 3×3 abbiano determinante nullo. Le due equazioni in x, y, z così ottenute costituiscono l'equazione cartesiana della retta.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^2$, di lati $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2)$ è:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^3$, di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|u \times v|$ del vettore $u \times v$ prodotto vettoriale di u e v:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u \times v|$$

- Il **volume del parallelepipedo** di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(u,\ v \times w)$:

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u,\ v \times w)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni conica $f(x,y)=0$, possiamo associare due matrici quadrate simmetriche: la matrice $A \in M_{2\times 2}$ relativa alla forma quadratica associata alla conica, e la matrice $A' \in M_{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della conica è

$$f(x,y) = [x,y,1]\cdot A' \cdot [x,y,1]^T = [x,y]\cdot A \cdot [x,y]^T + 2\left(h^T \cdot [x,y]^T\right) + k = 0$$

Possiamo inoltre definire gli **invarianti ortogonali** dell'equazione della conica.

- **Invariante cubico**: $I_3 = \det(A')$,
- **Invariante quadratico**: $I_2 = \det(A)$,
- **Invariante lineare**: $I_1 =$ traccia di $A =$ somma degli elementi della diagonale di $A =$ somma degli autovalori di A.

Classificazione.

- Una conica è **non degenere** se $I_3 = \det(A') \neq 0$. Inoltre è:
  - **Ellisse**: se gli autovalori sono concordi, ovvero se $I_2 = \det(A) > 0$.
  - **Iperbole**: se gli autovalori sono discordi, ovvero se $I_2 = \det(A) < 0$.
  - **Parabola**: se ha un autovalore nullo, ovvero se $I_2 = \det(A) = 0$.
- Una conica è **degenere** se $I_3 = \det(A') = 0$. Inoltre:
  - Se $\text{rg}(A') = 2$ è **semplicemente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette distinte (reali o immaginarie).
  - Se $\text{rg}(A') = 1$ è **doppiamente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette coincidenti.

Centro e assi o vertice e asse.

- **Centro**
  - Iperbole e ellisse sono coniche a centro. Il centro si determina risolvendo il sistema:
$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$
  - Se la conica è degenere e si tratta di una coppia di rette incidenti, si tratta di una conica a centro. Il centro è il punto di intersezione delle due rette e può anche essere determinato come per le coniche a centro non degeneri.
- **Assi**
  - Gli assi di iperbole e ellisse sono le rette passanti per il centro, aventi direzioni parallele agli autovettori di A.
  - L'asse della parabola è una retta di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo passante per il vertice. Il **vertice** è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola. Non avendo in generale il vertice, per determinare l'asse si può:
    * Determinare la direzione dell'asse.
    * Determinare la generica equazione di una retta r perpendicolare all'asse.
    * Determinare i punti di intersezione D e E di r con la parabola.
    * Determinare il punto medio M del segmento DE.
    * L'asse è la retta per M di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
    * Una volta nota l'equazione dell'asse si può ricavare il vertice.
  - In alternativa assi, centro e vertice si possono ricavare dalla forma canonica se si è a conoscenza delle trasformazioni che permettono di passare dall'equazione alla forma canonica e viceversa.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T AR = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forma canonica con equazioni della trasformazione.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere, ovvero una delle forme:

- $ax^2 + by^2 - 1 = 0$, ellisse reale,
- $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, ellisse immaginaria,
- $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, iperbole,
- $x^2 - 2py = 0$, parabola,

con $a, b > 0$, dobbiamo eseguire due trasformazioni:

(1) **Rotazione**. Lo scopo è ruotare la conica in modo che gli assi (o l'asse) siano paralleli agli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza del termine xy.

(2) **Traslazione**. Lo scopo è traslare la conica in modo che il centro (nel caso di ellisse o iperbole) o il vertice (nel caso della parabola), coincida con l'origine degli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza dei termini x e y.

Vediamo come procedere.

(1) **Rotazione**.
   i) Si determinano gli autovalori e autovettori di A, in modo da ottenere la matrice R ortonormale speciale tale che $R^T AR = D$, matrice diagonale. Questo corrisponde a effettuare il cambiamento di base:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
   ii) Si sostituiscono al posto di x e y le nuove coordinate X e Y ottenendo così una equazione priva del termine XY. Notiamo che la forma quadratica associata alla conica nelle nuove coordinate sarà del tipo:
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$
   dove λ_i sono gli autovalori di A. E' quindi opportuno prendere gli autovalori nell'ordine desiderato (e non è necesario sostituire X e Y nella parte quadratica perché sappiamo già il risultato che otterremo).

(2) **Traslazione** Possiamo distinguere due casi.
   - **Coniche a centro**. Si può procedere in due modi:
     i) Completamento dei quadrati, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del centro della conica (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare.
   - **Parabole**.
     i) Completamento del quadrato e contemporaneamente eliminazione del termine noto, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del vertice della parabola (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare. Poiché la ricerca del vertice della parabola è piuttosto laboriosa, in genere conviene utilizzare il primo metodo.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $I_3 = \det(A')$ per verificare che la conica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$ di A e stabiliamo di quale conica si tratta.
- Se si tratta di un'**ellisse** o un'**iperbole** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori di } A$$
  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica.

- Se si tratta di una **parabola** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $x^2 - 2py = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \text{ autovalore non nullo di } A$$

  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per λ si ottiene la forma canonica.

Equazioni della trasformazione. Passando da un'equazione $f(x, y) =$ alla corrispondente forma canonica $f(X, Y) = 0$ abbiamo effettuato un cambiamento di base corrispondente a una rotazione R (definita dagli autovettori di A) e una traslazione definita dal centro $C(x_0, y_0)$ o dal vertice $V(x_0, y_0)$ della conica. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove R è la matrice di rotazione, ovvero la matrice diagonalizzante ortogonale speciale associata a A.

Coniche degeneri.

Per determinare le equazioni delle rette che formano che le coniche degeneri si deve risolvere una equazione di secondo grado in cui si considera la x come variabile e la y come parametro, o viceversa.

- Se la conica è semplicemente degenere ($\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette distinte.
- Se la conica è doppiamente degenere ($\text{rg}(A') = 1$) si ottiene una sola retta.
- Se la conica è a centro ($\det(A) \neq 0$, quindi $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette incidenti nel centro.
- Se è una parabola degenere ($\det(A) = 0$, ma $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette parallele.

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni quadrica $f(x,y,z)=0$, possiamo associare due matrici quadrate: la matrice $A \in M_{3\times 3}$ relativa alla forma quadratica associata alla quadrica, e la matrice $A' \in M_{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy & 1/2 \text{ coeff. di } xz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 & 1/2 \text{ coeff. di } yz \\ 1/2 \text{ coeff. di } xz & 1/2 \text{ coeff. di } yz & \text{coeff. di } z^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \\ 1/2 \text{ coeff. della } z \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della quadrica è

$$f(x,y,z) = [x,y,z,1] \cdot A' \cdot [x,y,z,1]^T = 0$$

Invarianti.

Il polinomio caratteristico di A è così formato

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

con

$$I_1 = tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$
$$I_3 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad I_4 = \det(A')$$

$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ sono invarianti. Mentre $I_1,\ I_3,\ I_4$ possono essere calcolati direttamente da A e A', I_2 può essere calcolato solo da $p_A(\lambda)$.

Classificazione: quadriche non degeneri

Una quadrica è **non degenere** se $\det(A') \neq 0$, ovvero $\text{rg}(A') = 4$. Inoltre è

- **Ellissoide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A concordi (oppure $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 > 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: ELLISSOIDE IMMAGINARIO: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$
  - $I_4 = \det(A') < 0$: ELLISSOIDE REALE: $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$

- **Iperboloide**: $\text{rg}(A) = 3$, ovvero $\det(A) \neq 0$, e autovalori di A discordi (oppure $I_3 \neq 0$ e $I_2 \leq 0$ o $I_1 I_3 \leq 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: IPERBOLOIDE IPERBOLICO(a 1 falda): $ax^2 + by^2 - cz^2 - 1 = 0$.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: IPERBOLOIDE ELLITTICO (a 2 falde): $ax^2 - by^2 - cz^2 - 1 = 0$.

- **Paraboloide**: $\text{rg}(A) \leq 2$, cioè $\det(A) = 0$, cioè un autovalore nullo (oppure $I_3 = 0$). Inoltre:
  - $I_4 = \det(A') > 0$: PARABOLOIDE IPERBOLICO: $ax^2 - by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide iperbolico se i due autovalori non nulli di A sono discordi.
  - $I_4 = \det(A') < 0$: PARABOLODE ELLITTICO: $ax^2 + by^2 - z = 0$.
    Analogamente è un paraboloide ellittico se i due autovalori non nulli di A sono concordi.

Classificazione: quadriche degeneri

Una quadrica è **degenere** se $\det(A') = 0$. Inoltre:

- Se $\text{rg}(A') = 3$, allora è degenere **irriducibile**.
- Se $\text{rg}(A') \leq 2$, allora è degenere **riducibile**.

In particolare:

- **Cono** (quindi irriducibile): $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_4 = 0$ e $I_3 \neq 0$). Inoltre:
  - Auotovalori di A concordi (oppure $I_2 > 0$): cono a un unico punto reale $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$,
  - Auotovalori di A discordi (oppure $I_2 \leq 0$): cono reale $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$
- **Cilindro** (quindi irriducibile): Se $\text{rg}(A) = 2$, ma $\text{rg}(A') = 3$ (oppure $I_3 = 0$ e $\text{rg}(A') = 3$). Inoltre:
  - $I_2 > 0$: cilindro ellittico: $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$,
  - $I_2 < 0$: cilindro iperbolico: $ax^2 - by^2 - 1 = 0$,
  - $I_2 = 0$: Cilindro parabolico: $x^2 - 2py = 0$.

Se $\text{rg}(A') \leq 2$ allora è una quadrica degenere **riducibile**. Inoltre

- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 2$: due piani incidenti (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 2$ e $\text{rg}(A) = 1$: due piani distinti e paralleli (reali o complessi),
- Se $\text{rg}(A') = 1$: un piano doppio.

Centro e assi

- Ellissoide e iperboloide sono quadriche a centro. Come per le coniche il **centro** si trova risolvendo il sistema $A| - h$.
- Come per le coniche gli **assi** di una quadrica non degenere a centro sono le rette passanti per il centro e di direzione corrispondente agli autovettori della matrice A della quadrica.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T AR = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forme canonica con equazioni della trasformazione delle quadriche **non degeneri**:

Per ottenere la forma canonica si procede esattamente come per le coniche:

(1) **Rotazione**: utilizzando una matrice ortonormale R di rotazione,
(2) **Traslazioine**.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una quadrica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $\det(A')$ per verificare che la quadrica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ di A e stabiliamo di quale quadrica si tratta.
- Consideriamo i diversi casi:
  - Se si tratta di un **ellissoide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è reale o immaginaria.
  - Se si tratta di un **iperboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - cz^2 - 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ autovalori di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica. Solo a questo punto possiamo stabilire se è un iperboloide a una o a due falde.
  - Se si tratta di un **paraboloide** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 - z = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2tz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori non nulli di } A$$

    Poiché $\det(A')$ è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t (negativo). Dividendo infine per t si ottiene la forma canonica.

Quadriche degeneri riducibili.

Se $\mathrm{rg}(A') \leq 2$ si possono trovare i piani risolvendo una equazione di secondo grado in una incognita (le altre due incognite vengono considerate parametri), oppure in generale scomponendo il polinomio $f(x, y, z)$ nel prodotto di due polinomi di primo grado.

1. Suggerimenti

- **Proiezioni**. Un piano $ax+by+cz+d=0$ ha coordinate omogenee $N(a,b,c,d)$. Un punto $P(a,b,c)$ ha coordinate omogenee $P(a,b,c,1)$. Un direzione $\overrightarrow{v}(a,b,c)$ corrisponde al punto improprio $P_\infty(a,b,c,0)$.

  La matrice della proiezione T su un piano π da un punto P o di direzione $\overrightarrow{v}$ si ottiene nel seguente modo. Indicate con N le coordinate omogenee del piano e con C le coordinate omogenee del centro o della direzione della proiezione si ha

$$M = N^t C - (NC) I_4 \qquad \Rightarrow \quad T(A) = AM$$