Formulario di Teoria dei Segnali [1]

Parte 1: Segnali determinati

[1] This documentation was prepared with LaTeX by Massimo Barbagallo

Proprietà dei segnali determinati

Energia, potenza e valor medio di un segnale

Segnali tempo continui

$$E_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \, dt$$

Segnali tempo discreti

$$E_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$x_m \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

Sviluppo in serie di Fourier

Definizione

Un segnale $x(t)$ periodico, di periodo $T_0 = \dfrac{1}{T_0}$ è sviluppabile in *serie di Fourier*. Le possibili espressioni per la serie di Fourier sono:

Forma reale polare

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$$

Forma esponenziale o complessa [2]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \text{con} \qquad X_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

[2] Tale sviluppo vale anche se il segnale $x(t)$ è complesso

Forma reale rettangolare

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)\right]$$

Relazioni tra i coefficenti di Fourier

$$a_0 = A_0 = X_0 \qquad \text{valor medio del segnale}$$

$$X_k = A_k e^{j\vartheta_k} \qquad X_{-k} = A_k e^{-j\vartheta_k}$$

$$a_k = A_k \cos\vartheta_k = A_k \frac{e^{j\vartheta_k} + e^{-j\vartheta_k}}{2} = \frac{X_k + X_{-k}}{2} = \Re\{X_k\}$$

$$b_k = A_k \sin\vartheta_k = A_k \frac{e^{j\vartheta_k} - e^{-j\vartheta_k}}{2j} = \frac{X_k - X_{-k}}{2j} = \Im\{X_k\}$$

$$a_k + jb_k = \frac{X_k + X_{-k}}{2} + j\frac{X_k - X_{-k}}{2j} = X_k$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \vartheta_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Proprietà

- **Linearità**

  $x(t)$ e $y(t)$ sono due segnali periodici di periodo T_0 aventi coefficenti di Fourier rispettivamente X_k e Y_k, allora si ha:

  $$z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \quad \Rightarrow \quad Z_k = a\,X_k + b\,Y_k$$

- **Simmetrie degli spettri**

  $$X_k = X_{-k}^* \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |X_k| & = |X_{-k}| \\ \angle X_k & = -\angle X_{-k} \end{cases} \qquad \text{con } x(t) \text{ reale}$$

- **Segnali pari e dispari**

  $$x(t) \text{ reale e pari} \quad \Rightarrow \quad X_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(2\pi k f_0 t)\,dt$$

  $$x(t) \text{ reale e dispari} \quad \Rightarrow \quad X_k = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(2\pi k f_0 t)\,dt$$

  Si nota immediatamente che nel caso in cui $x(t)$ sia reale e pari allora risulta $X_k = X_{-k}$, inoltre tali coefficenti sono reali. Se $x(t)$ è reale e dispari allora si ha $X_k = -X_{-k}$ e tali coefficenti risultano immaginari puri.

- **Traslazione nel tempo**

  $$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_k \cdot e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

- **Derivazione**

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} j2\pi k f_0 \cdot X_k$$

- **Segnale alternativo**

$x(t)$ periodico, di periodo T_0, è *alternativo* se risulta $x\left(t+\frac{T_0}{2}\right)=-x(t)$. Per tale segnale il coefficente X_k della serie di Fourier è *nullo* per tutti i valori *pari* dell'indice k. Infatti vale la formula semplificata:

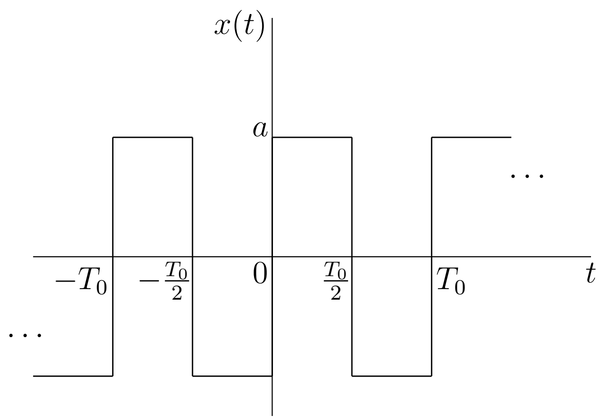
$$X_k = \frac{1-(-1)^k}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Sviluppi in serie di Fourier notevoli

- **coseno**

$$x(t) = a\,\cos(2\pi f_0 t) \;\Rightarrow\; X_k = \begin{cases} \frac{a}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

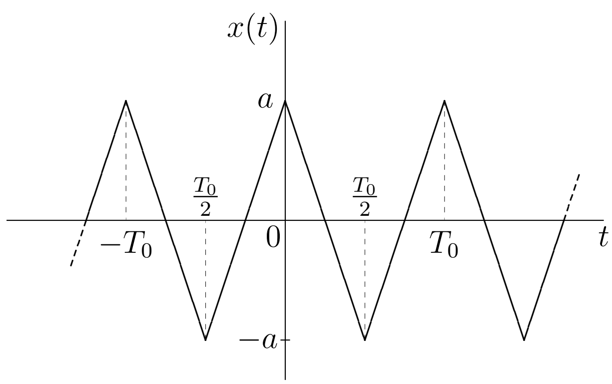
- **onda quadra**



Nel caso in cui $x(t)$ è l'onda quadra (dispari) rappresentata in figura allora i coefficenti X_k del suo sviluppo in serie di Fourier sono dati da:

$$X_k = \begin{cases} \frac{2a}{j\pi k} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

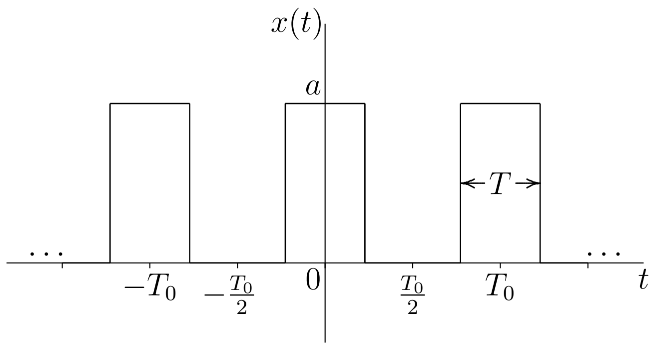
- **onda triangolare**



Per l'onda triangolare rappresentata in figura, i coefficenti dello sviluppo in serie di Fourier risultano pari a:

$$X_k = \begin{cases} \frac{4a}{(k\pi)^2} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

- **treno di impulsi** [3]



Nel caso in cui $x(t)$ è il treno di impulsi rappresentato in figura allora i coefficenti X_k sono dati da:

$$X_k = a\,\frac{T}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{T}{T_0}\right)$$

Il rapporto $\frac{T}{T_0}$ viene detto *duty-cycle* o *duty-factor*.

Trasformata continua di Fourier

Definizione

Un segnale $x(t)$ può essere visto come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza *infinitesima* e di frequenza variabile *con continuità* su tutto l'asse reale. Le due equazioni relative alla rappresentazione del segnale aperiodico sono:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} d\, f} \qquad \boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} d\, t}$$

Proprietà

- **Simmetrie degli spettri**

$$X(f) = X^*(-f) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\} \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\} \end{cases} \qquad \text{con } x(t) \text{ reale}$$

- **Segnali pari e dispari**

$$x(t) \text{ reale e pari} \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\, dt$$

$$x(t) \text{ reale e dispari} \quad \Rightarrow \quad X(f) = -2j\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

Nel caso in cui $x(t)$ sia reale e pari allora $X(f)$ è anch'essa reale e pari; mentre, se $x(t)$ è reale e dispari allora $X(f)$ è immaginaria pura e dispari.

[3] La funzione sinc$(\cdot)$ è definita nel modo seguente:

$$\mathrm{sinc}(t) \triangleq \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

- **Linearità**

$$x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = a\,X_1(f) + b\,X_2(f)$$

- **Dualità**

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \quad \Rightarrow \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

- **Traslazione nel tempo**

$$\mathcal{F}\left\{x\left(t-t_0\right)\right\} = X\left(f\right)e^{-j2\pi f t_0} \qquad \text{con} \qquad X\left(f\right) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{F}\left\{x\left(t\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\} = X\left(f-f_0\right) \qquad \text{con} \qquad X\left(f\right) = \mathcal{F}\left\{x\left(t\right)\right\}$$

- **Cambiamento di scala**

$$\mathcal{F}\{x(\alpha\,t)\} = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (\alpha \neq 0) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Trasformata di un segnale coniugato**

$$\mathcal{F}\{\overline{x}(t)\} = \overline{X}(-f) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- **Teorema della *modulazione***

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\cdot\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right\} = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2} \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\right\}$$

- **Teoremi di *derivazione e integrazione***

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right\} = j2\pi f\,X(f) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d\,X(f)}{d\,f}\right\} = -j2\pi t\,x(t) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\,\tau\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}X(0) \qquad \text{con} \qquad X(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\right\}$$

  il secondo termine aggiuntivo ci vuole quando il segnale $x(t)$ non sottende area nulla, cioè quando $X(0) \neq 0$.

- **Teorema del *prodotto*** [4]

$$\mathcal{F}\{x(t)\cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

- **Teorema della *convoluzione***

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)\cdot Y(f)$$

[4] L'asterisco indica l'operazione di *convoluzione*, definita nel modo seguente:

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\,\tau$$

tale operazione gode della *proprietà commutativa*.

Trasformate di Fourier generalizzate

- **Proprietà della δ di Dirac**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,d\,t = x(0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,d\,t = x(t_0)$$

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\,\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-t_0-\tau)\,d\,\tau = x(t-t_0)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta(a\,t) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$$

- **altre proprietà**

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \mathcal{F}\{1\} = \delta(f)$$

$$U(f) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} \qquad \mathcal{F}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \delta(f-f_0)$$

Trasformata continua di un segnale periodico

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f-f_0)}{2j}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t+\varphi)\} = \frac{1}{2}\,\delta(f-f_0)\,e^{j\varphi} + \frac{1}{2}\,\delta(f+f_0)\,e^{-j\varphi}$$

$$x\,(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \Rightarrow \quad X\,(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\,(f-kf_0) \quad \text{con } f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$X_k = f_0 \mathcal{F}\{x_{T_0}(t)\}\Big|_{f=kf_0}$$

Quest'ultima formula consente di calcolare i coefficenti dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale $x(t)$ periodico a partire dalla trasformata di Fourier del segnale $x_{T_0}(t)$ ottenuto troncando $x(t)$ in un periodo T_0.

Trasformate di Fourier notevoli

- **impulso rettangolare**[5]

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- **seno circolare**

$$x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{rect}(fT)$$

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\left(1 - |f|\,T\right)\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$$

- **impulso triangolare**

$$x(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- **impulso cosinusoidale**

$$x(t) = \cos\left(2\pi\frac{t}{2T}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2\,\frac{T}{\pi}\,\frac{\cos(\pi fT)}{1-(2fT)^2}$$

- **impulso cosinusoidale quadrato**

$$x(t) = \cos^2\left(2\pi\frac{t}{2T}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T}{2}\,\frac{\mathrm{sinc}(fT)}{1-(fT)^2}$$

- **pettine (treno di impulsi di Dirac)**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_0) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}\,\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

- **funzione segno**

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t>0 \\ -1 & \text{se } t<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{\mathrm{sign}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

- **gradino unitario**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\geqslant 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$$

[5] La funzione impulso rettangolare $\mathrm{rect}(t)$ è definita nella maniera seguente:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & \pm 1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- **esponenziale unilatero**

$$x(t) = e^{-t/T} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T}{1 + j2\pi f T}$$

- **segnale**

$$x(t) = t\, e^{-t/T} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{T^2}{(1 + j2\pi f T)^2}$$

- **sinusoide smorzata**

$$x(t) = e^{-t/T_1} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_2}\right) \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad X(f) = \frac{2\pi \frac{T_1^2}{T_2}}{\left(2\pi \frac{T_1}{T_2}\right)^2 + (1 + j2\pi f T_1)^2}$$

- **segnale gaussiano**

$$x(t) = e^{-t^2/\left(2T^2\right)} \quad \Rightarrow \quad X(f) = T\sqrt{2\pi} e^{-2(\pi f T)^2}$$

- **esponenziale bilatero**

$$x(t) = a\, e^{-|t|/T} \quad \Rightarrow \quad X(f) = 2a \frac{\frac{1}{T}}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + (2\pi f)^2}$$

- **coseno rettificato**

Il segnale *coseno rettificato* $y(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ é periodico di periodo $\frac{T_0}{2}$, con $T_0 = \frac{1}{f_0}$; tale segnale puó essere visto come la *ripetizione* del *segnale base* $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$, allora, per la *prima formula di Poisson*, si ha:

$$Y_k = \frac{2}{T_0} X\left(\frac{2k}{T_0}\right) = \frac{\mathrm{sinc}(k + 1/2) + \mathrm{sinc}(k - 1/2)}{2}$$

- **ripetizione**[6]

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rept}_T\left(y(t)\right)\right\} = F\, \mathrm{comb}_F\left(Y(f)\right) \qquad \text{con } F = \frac{1}{T} \text{ e } Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$$

[6] L'operatore *ripetizione* è definito nella seguente maniera :

$$\mathrm{rept}_{T_0}\left(x(t)\right) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

e avendo posto:

$$\text{comb}_F\Big(Y(f)\Big) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(kF)\,\delta(f-kF)$$

Vale anche la formula *duale*:

$$\mathcal{F}\Big\{\text{comb}_T\Big(y(t)\Big)\Big\} = F\,\text{rept}_F\Big(Y(f)\Big)$$

Periodicizzazione e formule di somma di Poisson

Dato il segnale aperiodico $x(t)$, costruiamo il segnale $y(t)$ periodico di periodo T_0:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)$$

Tale segnale é sviluppabile in serie di *Fourier*, cioé si ha:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

La *prima formula di somma di Poisson* ci dá il legame tra Y_k e la trasformata $X(f)$ del segnale aperiodico $x(t)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k \frac{1}{T_0} t}$$

La *seconda formula di somma di Poisson* é:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j2\pi nfT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Alcuni integrali notevoli

$$\int t^2 e^{-\alpha t} d\,t = t^2\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)} - 2t\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^2} + 2\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^3} + C$$

$$\int t e^{-\alpha t} d\,t = t\frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)} - \frac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha)^2} + C$$

$$\int t\cos(\alpha t)\,d\,t = t\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha t)}{\alpha^2} + C$$

$$\int t\sin(\alpha t)\,d\,t = -t\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha^2} + C$$

$$\int e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\,d\,t = \frac{\beta^2}{\beta^2+(-\alpha)^2}\,e^{-\alpha t}\left[\frac{1}{\beta}\sin(\beta t) + \frac{(-\alpha)}{\beta^2}\cos(\beta t)\right] + C$$

$$\int e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\,d\,t = \frac{\beta^2}{\beta^2+(-\alpha)^2}\,e^{-\alpha t}\left[-\frac{1}{\beta}\cos(\beta t)+\frac{(-\alpha)}{\beta^2}\sin(\beta t)\right]+C$$
$$\int \cos(\alpha t)\cos(\beta t)\,d\,t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)t+\frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)t\right]+C$$
$$\int \cos^2(\alpha t)\cos(\beta t)\,d\,t = \frac{\sin(\beta t)}{2\beta}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\alpha+\beta}\sin(2\alpha+\beta)t+\frac{1}{2\alpha-\beta}\sin(2\alpha-\beta)t\right]+C$$

Energia e potenza di segnali notevoli

$$x(t) = a\,\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad P_x=\frac{a^2}{2}$$
$$x(t) = a\,\sin\left(2\pi f_0 t+\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad P_x=\frac{a^2}{2}$$
$$x(t) = v_0 \quad\Rightarrow\quad P_x = v_0^2$$
$$x(t) = a\,e^{-t/T}\cdot u(t) \quad\Rightarrow\quad E_x=\frac{a^2}{2}T$$
$$x(t) = a\,e^{-|t|/T} \quad\Rightarrow\quad E_x = a^2\,T$$

Sistemi monodimensionali a tempo continuo

Definizione

Un sistema viene visto come *funzionale* dell'ingresso, cioè

$$y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,;t\right]$$

oppure, se non ci sono ambiguità

$$y(t) = \tau\left[x(t)\right]$$

Proprietà

- **Stazionarietà**

  Se $y(t) = \tau\left[x(t)\right] \quad\Rightarrow\quad \tau\left[x(t-t_0)\right] = y(t-t_0)$

- **causalità**

  $y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,,\alpha\leqslant t;t\right]$ oppure $y(t) = \tau\left[x(\alpha)\cdot u(t-\alpha)\,;t\right]$

- **memoria**

  Un sistema è senza *memoria* se

  $$y(t) = \tau\left[x(\alpha)\,,\alpha = t;t\right]$$

- **stabilità**

  $|x(t)|\leqslant M \quad\Rightarrow\quad |y(t)|\leqslant K \qquad$ con $M,K<+\infty$

- **linearità**

  $\tau\left[\alpha\,x_1(t)+\beta\,x_2(t)\right] = \alpha\,y_1(t)+\beta\,y_2(t) \qquad$ con $y_1(t)=\tau\left[x_1(t)\right]$ e $y_2(t)=\tau\left[x_2(t)\right]$

Caratterizzazione e analisi dei sistemi LTI

Risposta impulsiva

$$h(t) \triangleq \tau\left[\delta(t)\right]$$

$$y(t) = \tau\left[x(t)\right] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\,\alpha \qquad \text{con } x(t) \text{ arbitrario}$$

$$\text{SLS } \textit{causale} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) \equiv h(t) \cdot u(t)$$

$$\text{SLS } \textit{stabile} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, d\,t < +\infty$$

Risposta in frequenza

La *risposta in frequenza* la possiamo calcolare così:

$$H(f) = \begin{cases} \left.\dfrac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t)=e^{j2\pi f t}} \\ \dfrac{Y(f)}{X(f)} \\ \mathcal{F}\left\{h(t)\right\} \end{cases}$$

Si ha

$$H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)}$$

dove $|H(f)|$ é la *risposta in ampiezza* e $\angle H(f)$ é la *risposta in fase*.

Il decibel

$$|H(f)|_{dB} \triangleq 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}$$

dove f_0 é una frequenza di riferimento, di solito quella per cui si ha:

$$|H(f_0)| = \max_f |H(f)|$$

Sistemi in cascata e in parallelo

- **cascata**

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad \Rightarrow \quad H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

- **parallelo**

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad \Rightarrow \quad H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Filtri

Filtri ideali

- **filtro passa basso (*low-pass*)**

$$H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad h_{LP}(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2B\,t)$$

- **filtro passa alto (*hi-pass*)**

$$H_{HP}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\,\mathrm{sinc}(2B\,t)$$

- **filtro passa banda (*band-pass*)**

$$H_{BP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad h_{BP}(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(B\,t)\cdot\cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

con

$$f_0 = \frac{f_H + f_L}{2} \qquad \text{frequenza centrale}$$

$$B = f_H - f_L \qquad \text{banda}$$

$$\mathrm{Q} \triangleq \frac{f_0}{B} \qquad \text{fattore di qualitá}$$

- **filtro elimina banda (*band-reject*)**

$$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f) \quad \Leftrightarrow \quad h_{BR}(t) = \delta(t) - 2B\,\mathrm{sinc}(B\,t)\cdot\cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

Bande convenzionali

- **Banda a *-3 dB***

$$\left|X\left(B_{-3}\right)\right| = \frac{\max_f |X(f)|}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|X\left(B_{-3}\right)\right|^2}{\left|X\left(f_0\right)\right|^2} = \frac{1}{2}$$

Teoremi banda-durata

$x(t)$ durata limitata $\Rightarrow$ $X(f)$ banda illimitata

$X(f)$ banda limitata $\Rightarrow$ $x(t)$ durata illimitata

Densità spettrale di energia e potenza

Segnali di energia

Teorema di Parseval

Sia $x(t)$ un segnale ad energia finita, allora si ha:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

Correlazione

Dati due segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$, la loro *correlazione* è definita nel modo seguente:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) \odot y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,\overline{y}(t)\,d\,t$$

se $x(t) \equiv y(t)$ si parla di ***autocorrelazione***, altrimenti di ***crosscorrelazione***.
È importante osservare che la correlazione *non* gode della *proprietà commutativa*

Proprietà della correlazione

$x(t) \odot y(t) = x(t) * \overline{y}(-t)$

$\mathcal{F}\{x(t) \odot y(t)\} = X(f) \cdot \overline{Y}(f)$

$x(t) \odot x(t)\Big|_{t=0} = R_{xx}(0) = E_x$

$|R_{xx}(\tau)| \leqslant E_x$

$R_{xx}(\tau) = \overline{R_{xx}}(-\tau)$ simmetria coniugata

$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ con $x(t)$ reale

Densità spettrale di energia

Definizione

$S_{xx}(f) \triangleq |X(f)|^2$

Proprietà

$E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,d\,f$

$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(f)\}$ Teorema di Wiener

$S_{yy}(f) = |H(f)|^2\,S_{xx}(f)$ cioé $|H(f)|^2$ é la f.d.t. dell'energia

$S_{xx}(f) \geqslant 0$

$S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$ se $x(t)$ é reale

Densitá spettrale di energia mutua

$S_{xy}(f) \triangleq X(f) \cdot \overline{Y}(f) = \mathcal{F}\{x(t) \odot y(t)\}$

Vale la seguente uguaglianza di Parseval *generalizzata*:

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f)\,d\,f = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot \overline{X}(f)\,d\,f$$

Se i segnali sono *ortogonali* [7] allora si ha $S_{xy}(f)=0$, cioè la densità spettrale di energia mutua è nulla e non c'è interazione tra i due segnali.

---

[7] Due segnali $x(t)$ e $y(t)$ si dicono *ortogonali* se il loro *prodotto scalare*

$$(x,y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t)\,d\,t$$

è uguale a zero.

Segnali di potenza aperiodici

Correlazione

Dato un segnale aperiodico di potenza $x(t)$, definiamo la correlazione nel modo seguente:

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\,\overline{x}(t)\,d\,t$$

Se i segnali sono distinti, allora si parla di *mutua correlazione*:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\,\overline{y}(t)\,d\,t$$

Proprietà

$$R_{xx}(0) = P_x$$

$$|R_{xx}(\tau)| \leqslant R_{xx}(0) = P_x$$

$$R_{xx}(\tau) = \overline{R_{xx}}(-\tau) \qquad \text{simmetria coniugata}$$

Densità spettrale di potenza

Definizione

$$S_{xx}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

con

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\} \quad \text{e} \quad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{per } |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si prova che vale la relazione:

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$$

la quale viene utilizzata per il calcolo della $S_{xx}(f)$.

Proprietà

$$S_{xx}(f) \geqslant 0$$

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(-f) \qquad \text{con } x(t) \text{ reale}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,d\,f = P_x$$

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2\, S_{xx}(f)$$

Densitá spettrale di potenza mutua

$$S_{xy}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_T(f)\,\overline{Y_T}(f)$$

$$P_{xy} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,\overline{y}(t)\,d\,t \qquad \text{potenza scambiata tra } x(t) \text{ e } y(t)$$

Segnali di potenza periodici con periodo T_0

Teorema di Parseval

$$P_x = \frac{E_{x_{T_0}}}{T_0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Autocorrelazione

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t+\tau)\,\overline{x}(t)\,d\,t$$

La funzione di autocorrelazione é anch'essa *periodica* di periodo T_0.

Densitá spettrale di potenza

$$S_{xx}(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\,\delta\,(f-kf_0) \qquad \text{con } f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Proprietá

$$\mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f) \qquad \text{Teorema di Wiener Khintchine}$$

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2\,S_{xx}(f)$$

il segnale in uscita dal SLS é anch'esso periodico di periodo T_0.

Teorema del campionamento

Consideriamo un segnale $x(t)$ strettamente limitato in banda, cioè $X(f)=0 \quad \forall\,|f|>B$, allora $x(t)$ è completamente noto quando lo sono i valori

$$\boxed{x(nT) \qquad \text{con } \; n\in\mathbb{Z} \; \text{ e con } \; T \leqslant \frac{1}{2B}}$$

Le quantità $x(nT)$ sono i *campioni* del segnale, mentre T è il *periodo di campionamento*. L'espressione del segnale $x(t)$ ricostruito mediante i suoi campioni é:

$$x(t) = T\,2B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\cdot \operatorname{sinc}\Big(2B\,(t-kT)\Big)$$

questo è lo sviluppo in serie del segnale mediante le *funzioni campionatrici*. La frequenza di campionamento *limite* $F=2B$ è la ***frequenza di Nyquist***. Per segnali *passabanda* con banda

B, $f_L = f_m$ ed $f_H = f_M$, allora il segnale è completamente individuato dai campioni $x(nT)$ se la frequenza di campionamento è:

$$F = \frac{2f_M}{n}$$

dove n è il massimo intero non superiore a $\frac{f_M}{B}$.